Дәріс 4. Жиіліктік сипаттамалар. Типтік буындар

PhD, Калиева Н.Б.

Жиіліктік сипаттамалар

$$W(j\omega) = \frac{\text{B}(p)}{D(p)}. \qquad (1)$$

$p = \sigma + j\omega$ комплексті айнымалысының жорымал бөлігін алып, $p = j\omega$ берiлiс функциясына қоямыз.

$$W(j\omega) = \frac{\text{B}(j\omega)}{D(j\omega)} \qquad (2)$$

$W(j\omega)$ **- комплексті жиілікті сипаттама** деп, амплитуда-фазалық жиілікті (АФЖ) сипаттама деп, немесе комплексті күшейту коэффициенті деп аталады.

$$\text{B}(j\omega) = b_0 \left(j\omega\right)^m + b_1\left(j\omega\right)^{m-1} + \ldots + b_{m-1}(j\omega) + b_m$$

$$\text{B}(j\omega) = \text{B}_1(\omega) + j\text{B}_2(\omega)$$

$j = \sqrt{-1}$

$$D(j\omega) = D_1(\omega) + jD_2(\omega).$$

$$W(j\omega) = \frac{\text{B}_1(\omega) + j\text{B}_2(\omega)}{D_1(\omega) + jD_2(\omega)}$$

1-мысал
Оъектінің беріліс функциясы берілген.

$$W(p)=\frac{20}{p+3}.$$

НЖС, ЖЖС, АФС, АЖС, ФЖС тұрғызыңыз.

Шешуі:

$$p=i\omega$$

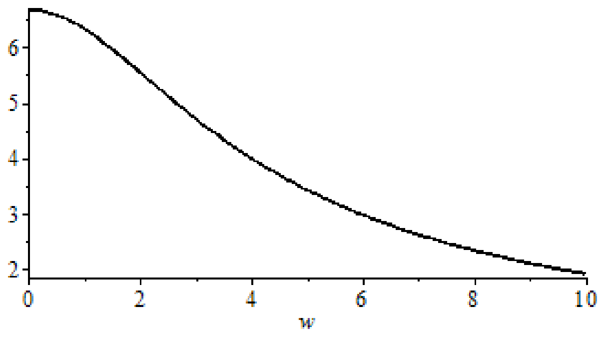
АФС (КЖС): $$W(i\omega)=\frac{20}{i\omega+3}$$

$$W(i\omega)=\frac{20}{i\omega+3}\cdot\frac{i\omega-3}{i\omega-3}=\frac{60}{\omega^2+9}-i\frac{20\omega}{\omega^2+9},$$

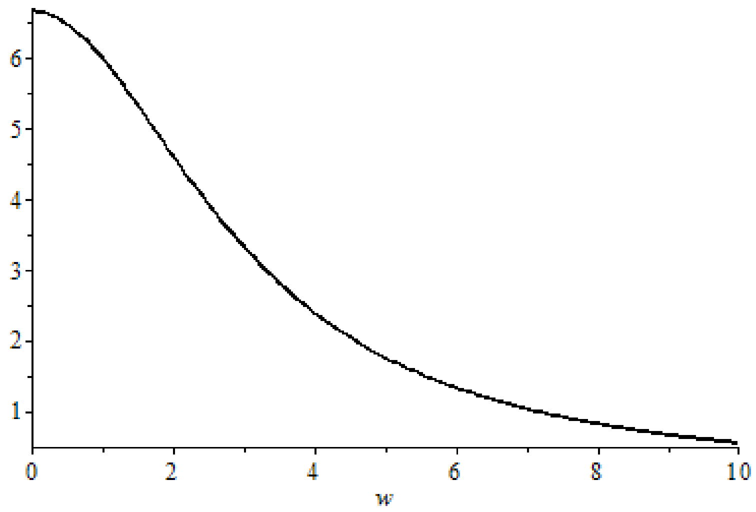
НЖС, ЖЖС: $$\mathrm{Re}(\omega)=\frac{60}{\omega^2+9},\mathrm{Im}(\omega)=-\frac{20\omega}{\omega^2+9}.$$

$$A(\omega)=\sqrt{\mathrm{Re}(\omega)^2+\mathrm{Im}(\omega)^2},$$

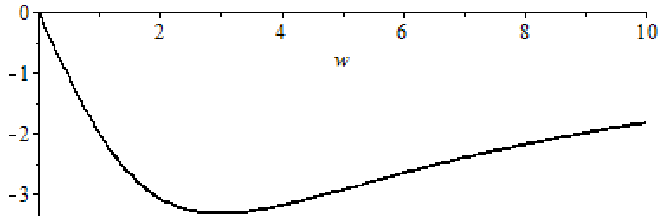
$$\theta(\omega)=arctg\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}.$$



НЖС

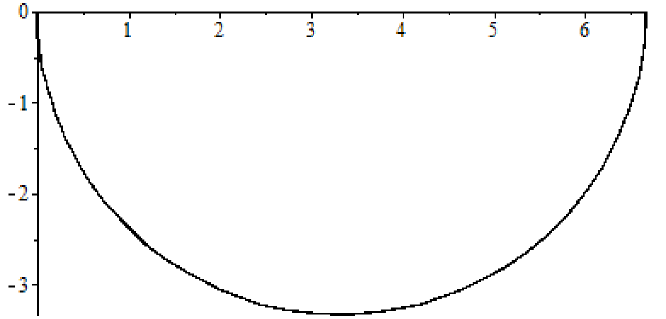


АЖС



ЖЖС

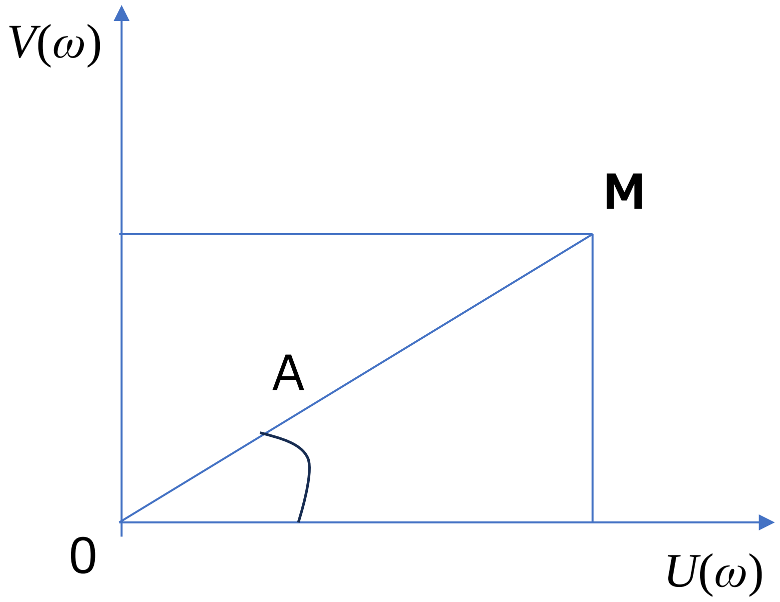
ФЖС



АФС (КЖС)

$$W(j\omega) = \frac{B_1(\omega)D_1(\omega) + B_2(\omega)D_2(\omega)}{D_1^2(\omega) + D_2^2(\omega)} + j\frac{B_2(\omega)D_1(\omega) - B_1(\omega)D_2(\omega)}{D_1^2(\omega) + D_2^2(\omega)}$$

$U(\omega)$ **нақты жиілікті сипаттама (НЖС)** деп аталады, ал $V(\omega)$ **жорамал жиілікті сипаттама** (ЖЖС) деп аталады.



$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \qquad (3)$$

$$V(\omega) = A\sin\phi,$$
$$U(\omega) = A\cos\phi\,,$$
$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)},$$
$$\phi(\omega) = arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

$$\mathrm{W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\cos(\omega) + j\sin(\omega))}$$

$$\cos\phi\,(\omega) + j\sin\phi\,(\omega) = e^{j\phi(\omega)}$$

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$A(\omega)$-ны **амплитудалық жиілікті сипаттама** (АЖС) деп немесе жай ғана амплитуда деп, ал $\phi\,(\omega)$-ны **фазалық жиілікті сипаттама** (ФЖС) деп, немесе жай ғана фаза деп атайды.

Типтік буындар

Алгебралық теңдеулермен сипатталатын буындар:

- **күшейткіш(пропорционалды);**
- **кешігуші.**

Бірінші ретті ДТ мен сипатталатын буындар:

- **инерциялық;**
- **интегралдаушы;**
- **дифференциалдаушы.**

Екінші ретті ДТ-мен сипатталатын буындар:

- **тербелуші;**
- **апериодты.**

Күшейткіш буын

Математикалық моделі:

$$y(t) = k \cdot x(t),$$

мұндағы, *k*–күшейту коэффициенті.

Операторлық теңдеуі:

$$Y(p) = k \cdot X(p).$$

Беріліс функциясы күшейту коэффициентінің өзі болып табылады:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = k.$$

Комплексті жиілікті сипаттама (КЖС):

$$W(i\omega) = k,$$
$$W(i\omega) = Re(\omega) + i\, Im(\omega) = U(\omega) + iV(\omega).$$

Нақты жиілікті сипаттама (НЖС):$U(\omega) = k$,

Жорамал жиілікті сипаттама (ЖЖС): $V(\omega) = 0$.

Амлитудалық жиілікті сипаттама:

$$A(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = k.$$

Фазалық жиіліктік сипаттама:

$$tg\phi = \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, \phi(\omega) = arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)} = 0.$$

Логарифмдік амплитудалық жиілікті сипаттама (ЛАЖС):

$$L(\omega) = 20\, lg\, A\,(\omega) = 20\, lg\, k.$$

Өтпелі функциясы:

$$x(t) = 1(t), y(t) = h(t),$$
$$h(t) = k \cdot 1(t).$$

Кешігуші буын

Математикалық моделі:

$$y(t) = kx(t-\tau),$$

мұндағы, τ– кешігу уақыты.

Операторлық теңдеуі:

$$Y(p) = ke^{-p\tau}X(p).$$

Буынның беріліс фукциясы:

$$W(p) = ke^{-p\tau}.$$

Комплексті жиілікті сипаттамасы (КЖС):

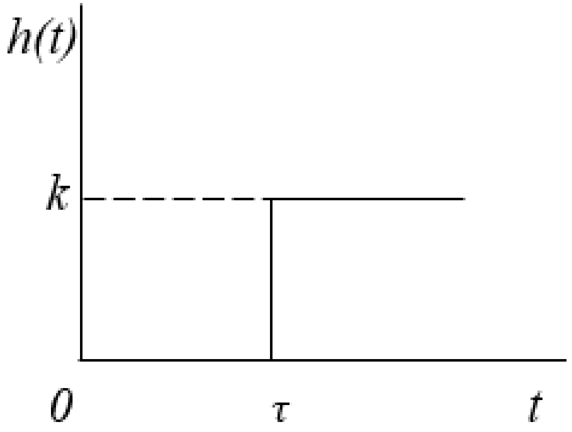
$$W(i\omega) = ke^{-i\omega\tau} = k(cos\,\omega\,\tau - i\,sin\,\omega\,\tau).$$

Нақты жиілікті сипаттама (НЖС): $U(\omega) = k\, cos\, \omega\, \tau,$

Жорамал жиілікті сипаттама: $V(\omega) = -k\, sin\, \omega\, \tau.$

Амлитудалық жиілікті сипаттама:

$$A(\omega) = \sqrt{k^2(cos^2\, \omega\, \tau + sin^2\, \omega\, \tau)} = k.$$



Фазалық жиіліктік сипаттама:

$$tg\phi(\omega) = -\frac{sin\, \omega\tau}{cos\, \omega\tau} = -tg\omega\tau, \phi(\omega) = -\omega\tau.$$

Логарифмдік амплитудалық жиілікті сипаттама (ЛАЖС):

$$L(\omega) = 20\, lg\, A\, (\omega) = 20\, lg\, k.$$

Кешігуші буынның өтпелі функциясы:

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau).$$

Инерциалық буын

Басқаша атауы - **бірінші ретті апериодты буын**.

Математикалық моделі:

$$T\frac{dy}{dt} + y = k,$$

мұндағы, T– буынның уақыт тұрақтысы, k – күшейту коэффициенті.

Операторлық теңдеу:

$$(Tp + 1)Y(p) = kX(p)$$

Беріліс функциясы: $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$.

Буынның *комплексті жиілікті сипаттамасы (КЖС):*

$$W(i\omega) = \frac{k}{Ti\omega+1} = \frac{k}{\omega^2T^2+1} - i\frac{k\omega T}{\omega^2T^2+1}.$$

Нақты жиілікті сипаттама (НЖС): $U(\omega) = \frac{k}{\omega^2T^2+1}$.

Жорамал жиілікті сипаттама: $V(\omega) = -\frac{k\omega T}{\omega^2T^2+1}$.

Амлитудалық жиілікті сипаттама (АЖС):

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{\omega^2T^2+1}}$$

Фазалық жиіліктік сипаттама (ФЖС):

$$\phi(\omega) = arctg\omega\tau$$

Логарифмикалық амплитудалық жиілікті сипаттама (ЛАЖС):

$$L(\omega) = 20 \cdot lg\frac{k}{\sqrt{\omega^2T^2+1}} = 20\,lg\,k - 10\,lg(\,\omega^2T^2+1).$$

Интегралдаушы буын

Математикалық моделі:

$$\mathrm{T}\frac{dy}{dt} = k\mathrm{x}. \qquad y = \frac{k}{T}\int_0^t x dt.$$

Операторлық теңдеуі:

$$TpY(p) = kX(p).$$

Беріліс функциясы:

$$W(p) = \frac{k}{Tp}.$$

Комплексті жиілікті сипаттама: $W(j\omega) = -j\frac{k}{T\omega}$.

Нақты жиілікті сипаттама: $U(\omega) = 0$.

Жорамал жиілікті сипаттама: $V(\omega) = -k/T$.

Амплитудалық жиілікті сипаттама:

$$A(\omega) = \frac{k}{T\omega}.$$

Фазалық жиілікті сипаттама: $tg\phi(\omega) = -\infty$, φ = - 90.

Логарифмдік амплитудалық жиілікті сипаттама:

$$L(\omega) = 20\, lg\, \frac{k}{\omega T} = 20\, lg\, \frac{k}{T} - 20\, lg\, \omega.$$

Өтпелі функция:

$$y = \frac{k}{T} t.$$

Дифференциалдаушы буын

Математикалық моделі: $y = k\frac{dx}{dt}.$

Операторлық теңдеуі: $Y(p) = kp\,X(p)$.

Беріліс функциясы: $W(p) = kp,$

мұндағы, k – күшейту коэффициенті.

Комплексті жиілікті сипаттамасы:

$$W(j\omega) = jk\omega\ .$$

Нақты жиілікті сипаттамасы: $U(\omega) = 0$,

Жорамал жиілікті сипаттама: $V(\omega) = k\omega$

Амплитудалық жиілікті сипаттама: $A(\omega) = k\omega$.

Өтпелі функция: $h(t) = k\frac{d}{dt}1(t) = k\delta(t).$

Реал дифференциалдаушы буынды

Математикалық моделі: $T\frac{dy}{dt} + y = k\frac{dx}{dt}.$

Операторлық теңдеуі: $(Tp + 1)Y(p) = kpX(p).$

Беріліс функциясы: $W(p) = \frac{kp}{Tp+1}.$

Комплексті жиілікті сипаттама: $W(j\omega) = \frac{j\text{к}\omega}{j\omega\text{T}+1}.$

Нақты және жорамал жиілікті сипаттамалар: $U(\omega) = \frac{kT\omega^2}{\omega^2T^2+1}, V(\omega) = \frac{k\omega}{\omega^2T^2+1}.$

Амплитуда жиілікті сипаттама: $A(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = \frac{k\omega}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}.$

Фазалық жиіліктік сипаттамасы: $\varphi(\omega) = \text{arctg}\frac{1}{\omega T}.$

Логарифмдік амплитудалық жиілік сипаттама:

$$L(\omega) = 20\,lg\,A(\omega) = 20\,lg\,k + 20\,lg\,\omega - 10\,lg(\omega^2T^2 + 1).$$

Өтпелі функция: $h(t) = \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}, \quad t = 0, h(0) = k/T.$

Тербелуші буын

Математикалық моделі:

$$T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + T_0 \frac{dy}{dt} + y = kx$$

(${T_0}^2 < 4T^2$ шарты орындалуы тиіс).

Тербелетін үдерістер екі маңызды параметрлармен сипатталады. Олар: өшу коэффициентті ξ, және резонансті жиілік ω_0. Әрі олар екі теңдеумен есептеледі: $\xi = T_0 / 2T$, $\omega_0 = 1 / T$.

$$T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = kx,$$

$T_0^2 < 4T^2$ шарты, $\xi^2 < 1$ шартымен ауысады.

Операторлық теңдеуі:

$$(T^2p^2 + 2\xi Tp + 1)\, Y(p) = kX(p).$$

Беріліс функциясы:

$$W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}$$

Буынның *комплексті жиілікті сипаттамасы:* $W(j\omega) = \frac{k}{-T^2\omega^2 + j2\xi T\omega + 1}$.

Нақты және жорамал жиілікті сипаттамалар: $U(\omega) = \frac{k(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}$,

$$V(\omega) = -\frac{k2\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}.$$

Тербелуші буынның *амплитуда жиілікті сипаттамасы:* $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}}$.

Фазалық жиілікті сипаттама $\omega = 0$ пен $\omega = 1/T$ аралығында:

$$\phi(\omega) = -arctg\,\frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$$

Логарифмикалық жиіліктік сипаттама:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg [(1-T^2\omega^2)^2 + 4\,\xi^2 T^2\omega^2].$$

Өтпелі функция:

$$h(t) = k\left[1 - e^{-\xi\omega_0 t}(\cos\omega\,t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega\,t)\right],$$

Екінші ретті апериодты буын

Математикалық моделі: $T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + T_0 \frac{dy}{dt} + y = kx$

($T_0 > 2T$ шарты орындалуы тиіс).

Операторлық теңдеу: $(T^2p^2 + T_0 p + 1)Y(p) = kX(p)$.

Беріліс функциясы: $W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + T_0p + 1}$.

Комплексті жиілікті сипаттама: $W(j\omega) = \frac{k}{-T^2\omega^2 + jT_0\omega + 1}$.

Нақты және жорамал жиілікті сипаттамалар:

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + T_0^2\omega^2}, V(\omega) = -\frac{kT_0\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + T_0^2\omega^2}.$$

Амплитудалық жиіліктік сипаттамасы: $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + T_0^2\omega^2}}$

ФЖС $0 \le \omega \le 1 / T$ интервалында:

$$\phi(\omega) = -arctg \frac{T_0\omega}{1 - T^2\omega^2}$$

$1 / T < \omega < \infty$ интервалында:

$$\phi(\omega) = -\pi - arctg \frac{T_0\omega}{1 - T^2\omega^2}$$

Өтпелі функция:

$$h(t) = k\left[\frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} + 1\right].$$

Ұсынылатын әдебиеттер:

1. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
2. Қыдырбекұлы А.Б. Автоматика негіздері : оқу құралы / Қыдырбекұлы А.Б., Ибраев Ғ.Е.. — Алматы: Казахский национальный университет им. аль-Фараби, 2014. — 114 с.
3. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. Теория систем автоматического управления. – С.-Пб.: Профессия, 2004. – 752 с.
4. Лукас В.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. – Екатеринбург: Из-во УГГГА, 2002. – 675 с.
5. Kluever C. A. Dynamic systems: modeling, simulation, and control. – John Wiley & Sons, 2020.